Corrigé du Concours National Commun
Épreuve de Mathématiques II
Session 2021 - Filière MP

m.laamoum@gmail.com

Exercice

1. **a)** On a $\det_{\mathcal{B}}(e_1',\ e_2',\ e_3') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ donc la famille $(e_1',\ e_2',\ e_3')$est libre , de plus elle a 3 éléments en dimension 3, donc $\mathcal{B}' = (e_1',\ e_2',\ e_3')$ est une base de E.

b) On a $[e_1']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[e_2']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $[e_3']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que :

$[f_a(e_1')]_{\mathcal{B}} = M_a\,[e_1']_{\mathcal{B}} = [e_1']_{\mathcal{B}}$, $\quad [f_a(e_2')]_{\mathcal{B}} = M_a\,[e_2']_{\mathcal{B}} = a\,[e_2']_{\mathcal{B}}$ et $[f_a(e_3')]_{\mathcal{B}} = M_a\,[e_3']_{\mathcal{B}} = (1-a)\,[e_3']_{\mathcal{B}}$.

Par suite $f_a(e_1') = e_1'$, $\quad f_a(e_2') = a\ e_2'$ et $f_a(e_3') = (1-a)e_3'$. Comme les vecteurs e_1', e_2' et e_3' sont non nuls alors ils sont des vecteurs propres de f_a associés respectivement aux valeurs propres 1, a et $1-a$.

c) On a $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$.

d) E admet une base, $\mathcal{B}'$, formée de vecteurs propres de f_a , donc f_a est diagonalisable, par suite la matrice M_a est diagonalisable.

e) $D_a = \mathrm{diag}(1,\ a,\ 1-a)$.

2. On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{array}\right.$$

a) On a $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = M_3\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

b) Soit $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Donc $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ (car P^{-1} est une matrice constante).

Comme $M_3 = PD_3P^{-1}$ avec $D_3 = \mathrm{diag}(1,\ 3,\ -2)$ et $X'(t) = M_3X(t)$ alors :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= P^{-1}M_3X(t) \\ &= P^{-1}PD_3P^{-1}X(t) \\ &= D_3P^{-1}X(t) \end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{Y'(t) = D_3Y(t)}$.

c) La relation $Y'(t) = D_3 Y(t)$ devient $\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = 3y_2(t) \\ y_3'(t) = -2y_3(t) \end{cases}$.

Donc $\boxed{y_1(t) = \alpha \mathrm{e}^t \text{ , } y_2(t) = \beta \mathrm{e}^{3t} \text{ et } y_1(t) = \gamma \mathrm{e}^{-2t}}$ avec α, β et γ des constantes réelles

d) On a $X(t) = P\ Y(t)$ donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^t \\ \beta \mathrm{e}^{3t} \\ \gamma \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^t + \gamma \mathrm{e}^{-2t} \\ \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{3t} \\ \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{3t} - \gamma \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

La solution générale de (S) est donnée par

$$\boxed{X(t) = \alpha \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ des constantes réelles}}$$

e) Soit X une solution de (S) vérifiant $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 2$, donc les constantes α,β et γ vérifient :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + \beta = 1 & (2) \\ \alpha + \beta - \gamma = 2 & (3) \end{cases}$$

On a alors : $(2) - (3) \Rightarrow \gamma = -1$, $(1) \Rightarrow \alpha = 1$, $(2) \Rightarrow \beta = 0$.

Donc $\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{-2t} \\ e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}}$.

Problème

Partie 1

Cas où A est une matrice possédant n valeurs propres distinctes

Soit $n \geq 2$, et A une matrice possédant n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, .., \lambda_n$ telles que $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. On pose $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$.

1. **a)** A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres réelles distinctes, $\lambda_1, .., \lambda_n$, donc elle est diagonalisable , par suite il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$.

b) Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$ et $S = P^{-1}RP$.
On a

$$R^2 = A \Leftrightarrow P^{-1}R^2P = D \Leftrightarrow S^2 = D$$

Donc R est une racine carrée de A si, et seulement si $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

2. Soit Δ une racine carrée de la matrice D donc $\Delta^2 = D$.

a) On a $\Delta D = \Delta^3$ et $D\Delta = \Delta^3$ donc $\Delta D = D\Delta$.

b) Posons $\Delta = (\Delta_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$. On a $D = (\lambda_i \delta_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ avec $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker .
Le produit ΔD a pour coefficients :

$$\forall i,j,\quad \sum_{k=1}^{n} \Delta_{i,k}\ \lambda_k\ \delta_{k,j} = \Delta_{i,j}\ \lambda_j$$

et les coefficients de $D\Delta$ sont

$$\forall i,j,\quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\ \delta_{i,k}\ \Delta_{k,j} = \lambda_i\ \Delta_{i,j}$$

$\Delta D = D\Delta$ donne $\Delta_{i,j}\lambda_j = \lambda_i \Delta_{i,j}\quad \forall i,j$, les λ_k étant deux à deux distincts donc

$$\forall i \neq j,\quad \Delta_{i,j} = 0$$

et Δ est une matrice diagonale.

c) On a $\Delta^2 = D$, $\Delta^2 = \operatorname{diag}\left(\delta_1^2, \dots, \delta_n^2\right)$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$ donc $\delta_i^2 = \lambda_i\ \forall i \in [\![1,n]\!]$.

3. Supposons qu'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} < 0$. Soit $R \in \mathcal{R}_n(A)$ alors $\Delta = P^{-1}RP$ est une racine de D.D'après la question 2) Δ est diagonale , $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\ \dots,\ \delta_n)$ et $\delta_i^2 = \lambda_i\ \forall i \in [\![1,n]\!]$, donc $\delta_{i_0}^2 = \lambda_{i_0} < 0$ ce qui est absurde. Donc $\mathcal{R}_n(A) = \varnothing$.

4. On suppose que $0 \leq \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$.

a) Une racine carrée de D est de la forme $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ avec $\delta_i^2 = \lambda_i\ \forall i \in [\![1,n]\!]$, donc $\delta_i = \pm\sqrt{\lambda_i}\ \forall i \in [\![1,n]\!]$.La réciproque est évidente .
Ainsi : $\boxed{\mathcal{R}_n(D) = \left\{\operatorname{diag}\left(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}\right)\ \mid\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n\right\}}$

b) On a $R \in \mathcal{R}_n(A)$ si et seulement si $P^{-1}RP \in \mathcal{R}_n(D)$, donc

$$\boxed{\mathcal{R}_n(A) = \left\{P\operatorname{diag}\left(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}\right)P^{-1}\ \mid\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n\right\}}$$

c) L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{Card}(\mathcal{R}_n(A)) = \operatorname{Card}(\mathcal{R}_n(D))$.
Si $\lambda_1 \neq 0$ alors chaque $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ définie un unique élément de $\mathcal{R}_n(D)$ donc $\operatorname{Card}(\mathcal{R}_n(D)) = \operatorname{Card}(\{-1,1\}^n) = 2^n$.
Si $\lambda_1 = 0$ alors $\mathcal{R}_n(D) = \left\{\operatorname{diag}\left(0, \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}\right)\ \mid\ (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^{n-1}\right\}$, ce qui donne $\operatorname{Card}(\mathcal{R}_n(D)) = \operatorname{Card}(\{-1,1\}^{n-1}) = 2^{n-1}$.
Ainsi : $\boxed{\text{si } \lambda_1 \neq 0 \text{ Card}(\mathcal{R}_n(A) = 2^n \text{ et si } \lambda_1 = 0 \text{ Card}(\mathcal{R}_n(A) = 2^{n-1}}$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1,2,3\}$ donc A est diagonalisable.

Les sous espaces propres : $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $E_2(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A)$ donc $AX = 3X$ qui s'écrit $\begin{cases} x = 3x \\ 2y + z = 3y \\ 3z = 3z \end{cases}$, on obtient $X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$

et $E_3(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1,2,3)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathcal{R}_3(A) = \left\{ P\text{diag}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt{2}, \varepsilon_3\sqrt{3}\right) P^{-1} \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1,1\}^3 \right\}$.

Partie 2

Cas où $A = \text{diag}\left(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_r I_{n_r}\right)$

1. a) Soit R une racine carrée de I_n, on a $R^2 = I_n$, donc $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de R scindé à racines simples, donc R est diagonalisable.

b) Soit $R \in R_n(I_n)$, donc R est diagonalisable, il existe P inversible et D diagonale telles que $R = PDP^{-1}$.

On a $R^2 = PD^2P^{-1} = I_n$ donc $D^2 = I_n$, les éléments diagonaux de D sont des racines carrées de 1, donc $D = \text{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ avec $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$. Réciproquement les matrices de cette forme sont racines de I_n .

Ainsi $\boxed{R_n(I_n) = \left\{ P\text{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) P^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall 1 \le i \le n, \varepsilon_i \in \{-1,1\} \right\}}$.

c) Soit $\lambda > 0$ et $R \in \mathcal{R}_n(\lambda I_n)$ donc $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} R\right)^2 = I_n$,on en déduit que

$$\boxed{R_n(\lambda I_n) = \left\{ P\text{diag}\left(\varepsilon_1\sqrt{\lambda}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda}\right) P^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall 1 \le i \le n, \varepsilon_i \in \{-1,1\} \right\}}$$

a) Soit $M = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A .

Notons $A = \text{diag}(\mu_1, .., \mu_n)$ avec $\lambda_i = \mu_i$ si $i \in J_k$ avec

$J_0 = [\![1, n_1]\!]$ et $J_k = [\![n_1 + \cdots + n_k + 1,\ n_1 + \cdots + n_{k+1}]\!]$ pour $k \in [\![1, r-1]\!]$.

Le calcul de la question 2)b) donne $(\mu_i - \mu_j)\, a_{i,j} = 0$ pour tout i et j dans $[\![1, n]\!]$.

Si $i \in J_k$ et $j \in J_h$ avec k et h dans $[\![1, r-1]\!]$ et $k \neq h$, alors $\mu_i = \lambda_i$, $\mu_j = \lambda_j$ et $\mu_i - \mu_j \neq 0$ ce qui donne $a_{i,j} = 0$. Donc tous les coefficients de M sont nuls à l'exception peut-être des coefficients $a_{i,j}$ tels que $(i,j) \in J_k \times J_k$ pour $k \in [\![1, r-1]\!]$, cela signifie que M est de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$,

où pour tout i de $[\![1, r]\!]$, A_i est une matrice de taille n_i.

Autre méthode : Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A, soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés, respectivement, à A et M , notons $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Posons pour k dans $[\![1, r-1]\!]$ $\mathcal{B}_k = (e_i)_{i \in J_k}$ et $F_k = \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$. On a alors :

$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=0}^{n-1} F_k$, pour tout k dans $[\![1, r-1]\!]$, $F_k = \ker(f - \lambda_k\, id)$, et $\dim F_k = n_k$.

On a g commute avec f , donc pour tout k dans $[\![1, r-1]\!]$, g commute avec $f - \lambda_k\, id$ par suite F_k est stable par g .

Posons $Mat_{\mathcal{B}_k}(g_{|F_k}) = A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{R})$, on a alors

$$M = Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$$

b) Les éléments de $\mathcal{R}_n(A)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$, où pour tout i de $[\![1, r]\!]$, A_i est une matrice de taille n_i, et évidement les matrices de cette forme sont dans $\mathcal{R}_n(A)$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{R}_n(A) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} \mid A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R}) \ , \quad \forall i \in [\![1,r]\!] \right\}}$

2. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $N(M) = \max\limits_{1\le i,j\le n} |m_{ij}|$, pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$

a) On a $S_q^2 = I_2$ donc $S_q \in \mathcal{R}_2(I_2)$. Pour tout $q \geq 1$ on a $N(S_q) = q$ donc $\mathcal{R}_2(I_2)$ n'est pas borné dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) Soit $n \geq 3$, posons $A_q = \begin{pmatrix} S_q & (0) \\ (0) & I_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A_q \in \mathcal{R}_n(I_n)$ et pour tout $q \geq 1$ on a $N(A_q) = q$, donc $\mathcal{R}_n(I_n)$ n'est pas une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie 3

Cas où A est une matrice nilpotente

1. a) On a $B^{2p} = A^p = 0_n$ et $B^{2(p-1)} = A^{p-1} \neq 0_n$.

b) On a X^{2p} est un polynôme annulateur de B tandis que $X^{2(p-1)}$ n'est pas annulateur de B , donc π_B divise X^{2p} mais ne divise pas $X^{2(p-1)}$, donc $\pi_B(X) = X^k$ avec $2(p-1) < k \leq 2p$ par suite $\boxed{\pi_B(X) = X^{2p} \text{ ou } \pi_B(X) = X^{2p-1}}$.

c) On sait que $\deg \pi_B \leq n$, d'après b) on a $\deg \pi_B \geq 2p-1$, donc $2p-1 \leq n$ et $\boxed{p \leq \frac{n+1}{2}}$.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

a) On a $\pi_A(X) = X^p$, donc $P^2 - X - 1$ est annulateur de A si et seulement si $\pi_A(X)$ divise $P^2 - X - 1$, ce qui est équivalent à $P^2(A) = I_n + A$ si et seulement si X^p divise $P^2 - X - 1$.

b) Soit Q_p le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\sqrt{1+x} = Q_p(x) + o\left(x^{p-1}\right)$ au voisinage de 0.
Posons $\sqrt{1+x} = Q_p(x) + x^{p-1}\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, en élevant au carré cela donne

$$1 + x = Q_p^2(x) + x^{p-1}\left(2Q_p(x)\varepsilon(x) + x^{p-1}\varepsilon^2(x)\right)$$

donc $\dfrac{1+x-Q_p^2(x)}{x^{p-1}} \underset{x\to 0}{\to} 0$, comme la fonction $x \mapsto 1 + x - Q_p^2(x)$ est polynomiale alors elle ne contient pas de terme en x^k avec $k \in [\![0, p-2]\!]$ ce qui singifie que X^p divise $Q_p^2(X) - X - 1$, par suite $\boxed{Q_p^2(A) = I_n + A}$.

3. a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$ on a $I_n \in \mathcal{R}_n(\alpha A + I_n)$. Si $\alpha \neq 0$ alors αA est nilpotente d'indice p donc $Q_p^2(\alpha A) \in \mathcal{R}_n(\alpha A + I_n)$.
Ains $\mathcal{R}_n(\alpha A + I_n)$ est non vide pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Soit $\beta > 0$, on a $\mathcal{R}_n\left(\frac{1}{\beta}A + I_n\right)$ est non vide . Si $R \in \mathcal{R}_n\left(\frac{1}{\beta}A + I_n\right)$ alors $\sqrt{\beta}R \in \mathcal{R}_n(A + \beta I_n)$ donc $\mathcal{R}_n(A + \beta I_n)$ est non vide.

4. Posons $H = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a N est nilpotente d'indice 3.

D'après la question 2) on a $Q_2^2(N) = I_n + N = H$ donc $Q_2(N)$ est une solution de l'équation $X^2 = H$.

On a $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)$ donc $Q_2(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$. Par suite $Q_2(N) = I_3 + \dfrac{1}{2}N - \dfrac{1}{8}N^2$.

$$\boxed{\text{Une solution de l'équation } \ X^2 = H \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Partie 4

Cas où A est une matrice carrée symétrique réelle positive

1. Soit M une matrice symétrique réelle, d'après le théorème spectral M est diagonalisable et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}^n$) admet une base orthonormée $(V_1, .., V_n)$ formée de vecteurs propres de M, notons λ_i la valeur propre associée à V_i , pout i dans $[\![1, n]\!]$.

- Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$, en particulier pour i dans $\{1, .., n\}$, ${}^tV_iMV_i \geq 0$.
  On a $MV_i = \lambda_i V_i$ donc ${}^tV_iMV_i = \lambda_i \ {}^tV_iV_i = \lambda_i$ (${}^tV_iV_i = \|V_i\|^2 = 1$) , par suite $\lambda_i \geq 0$.
  Donc Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors toutes ses valeurs propres sont positives.
- Supposons que pour i dans $[\![1, n]\!]$ $\lambda_i \geq 0$.
  Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$.
  On a $MX = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i V_i$ et ${}^tXMX = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \ ({}^tXV_i)$, d'autre part ${}^tXV_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \ {}^tV_kV_i$, or $(V_1, .., V_n)$ est une base orthonormée $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tV_kV_i = 0$ si $i \neq k$ et ${}^tV_kV_i = 1$ si $i = k$, ce qui donne ${}^tXV_i = \alpha_i$ et ${}^tXMX = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$.
  On a pour tout i dans $[\![1, n]\!]$ $\lambda_i \geq 0$, donc ${}^tXMX \geq 0$ et $M \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2. Soit A une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$.

a) A est symétrique réelle, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable et il existe deux matrices, P orthogonale et D diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $A = PDP^{-1} = P.D.{}^tP$, $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

b) D'après la question 1) toutes ses valeurs propres de A sont positives, soit $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et $S = P.\Delta.{}^tP$, on alors $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $S^2 = A$.

3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et S_1 et S_2 deux matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S_1^2 = S_2^2 = A$.
Soient $P_1.P_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D_1 = \text{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $D_2 = \text{diag}(\beta_1, ..., \beta_n)$ telles que, $S_1 = P_1D_1P_1^{-1}$ et $S_2 = P_2D_2P_2^{-1}$.
Comme $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

a) On a $S_1^2 = S_2^2$ donc $P_1D_1^2P_1^{-1} = P_2D_2^2P_2^{-1}$ et $P_2^{-1}P_1D_1^2 = D_2^2P_2^{-1}P_1$ ainsi $\boxed{PD_1^2 = D_2^2P}$

b) On a $PD_1^2 = D_2^2P$ donc $D_1^2 = P^{-1}D_2^2P$. Les matrices D_1^2et D_2^2 sont semblables , elles ont donc le même spectre par suite $\alpha_i^2 = \beta_i^2 \ \forall i \in [\![1, n]\!]$, donc $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (car $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$), d'où $D_1 = D_2$.
De la relation $D_1 = P^{-1}D_2P$ et $P = P_2^{-1}P_1$, on obtient $P_1D_1P^{-1} = P_2D_2P_2^{-2}$, c'est-à-dire $\boxed{S_1 = S_2}$.

Partie 5

Étude d'un cas où A est une matrice complexe

1. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$ alors $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in \,]-\pi, \pi[$ et $r > 0$. z admet deux racines carrées $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
On a $\mathrm{Re}(z_1) = \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Don $y = z_1$ est l'unique complexe tel que $\mathrm{Re}(y) > 0$ et $y^2 = z$.

2. Le résultat est vraie pour $n = 1$ d'après la question 1.
On le suppose vrai pour n . Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, telle que pour tout i de $[\![1, n+1]\!]$, $t_{i,i} \notin \mathbb{R}^-$.

On a $T = \left(\begin{array}{c|c} t_{1,1} & t_{1,2} \cdots t_{1,n+1} \\ \hline (0) & T' \end{array}\right)$ avec $T' = \begin{pmatrix} t_{2,2} & \cdots & \cdots & t_{2,n+1} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$

Par hypothèse de récurrence il existe une matrice triangulaire supérieure $X' = (x_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n+1}$ telle que pour tout i de $[\![2, n+1]\!]$, $\mathrm{Re}(x_{i,i}) > 0$ et $X'^2 = T'$.

Soit $x_{1,1}$ l'unique racine carrée de $t_{1,1}$ tel que $\mathrm{Re}(x_{1,1}) > 0$, posons $X = \left(\begin{array}{c|c} x_{1,1} & a_{1,2} \cdots a_{1,n+1} \\ \hline (0) & X' \end{array}\right)$.

Cherchons $a_{1,2} \cdots a_{1,n+1}$ pour que $X^2 = T$.

On a $X^2 = \left(\begin{array}{c|c} x_{1,1}^2 & y_2 \cdots y_{n+1} \\ \hline (0) & X'^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} t_{1,1} & y_2 \cdots y_{n+1} \\ \hline (0) & T' \end{array}\right)$ avec

$$\begin{cases} y_2 = x_{1,1}a_{1,2} + a_{1,2}x_{2,2} \\ y_3 = x_{1,1}a_{1,3} + a_{1,2}x_{2,3} + a_{1,3}x_{3,3} \\ \quad\vdots \\ y_{n+1} = x_{1,1}a_{1,n+1} + a_{1,2}x_{2,n+1} + \ldots + a_{1,n+1}x_{n+1,n+1} \end{cases}$$

$X^2 = T$ entraine

$$\begin{cases} t_{1,2} = x_{1,1}a_{1,2} + a_{1,2}x_{2,2} \\ t_{1,3} = x_{1,1}a_{1,3} + a_{1,2}x_{2,3} + a_{1,3}x_{3,3} \\ \quad\vdots \\ t_{1,n+1} = x_{1,1}a_{1,n+1} + a_{1,2}x_{2,n+1} + \ldots + a_{1,n+1}x_{n+1,n+1} \end{cases}$$

La première équation s'écrit $t_{1,2} = a_{1,2}\left(x_{1,1} + x_{2,2}\right)$, puisque $\mathrm{Re}(x_{1,1} + x_{2,2}) > 0$ alors $x_{1,1} + x_{2,2} \neq 0$ ce qui donne $a_{1,2} = \frac{t_{1,2}}{x_{1,1}+x_{2,2}}$.
Supposons qu'on a calculé $a_{1,2}, \ldots, a_{1,k-1}$ pour $k \in \{2, \ldots, n\}$ la $k-$ieme équation donne :
$t_{1,k} = x_{1,1}a_{1,k} + a_{1,2}x_{2,k} + \ldots + a_{1,k}x_{k,k}$, comme $x_{1,1} + x_{k,k} \neq 0$ alors $a_{1,k} = \frac{t_{1,k} - a_{1,2}x_{2,k} - \ldots - a_{1,k-1}x_{k-1,k}}{x_{1,1}+x_{k,k}}$.
Ainsi par récurrence on calcul les $a_{1,2} \cdots a_{1,n+1}$, ce qui définie la matrice triangulaire supérieure X telle que pour tout i de $[\![2, n+1]\!]$, $\mathrm{Re}(x_{i,i}) > 0$ et $X^2 = T$, et le résultat est vrai à l'ordre $n+1$.
Donc pour toute matrice $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $t_{i,i} \notin \mathbb{R}^-$ il existe une matrice triangulaire supérieure $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $\mathrm{Re}(x_{i,i}) > 0$ et $X^2 = T$.

3. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Sp(A) \cap \mathbb{R}^- = \varnothing$. Le polynôme caractéristique de A est scindé donc A est trigonalisable , il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$triangulaire supérieure , telle que $A = PTP^{-1}$, puisque pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $t_{i,i} \in Sp(A)$ donc $t_{i,i} \notin \mathbb{R}^-$.
D'après la question 2) il existe une matrice triangulaire supérieure $Y = (y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $\mathrm{Re}(y_{i,i}) > 0$ et $Y^2 = T$, posons $X = PYP^{-1}$ on a $Sp(X) = Sp(Y) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $X^2 = A$.